Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física - Instituto de Física
FIZ0313 - Métodos de la Física Matemática II
Profesor: Rafael Benguria (rbenguri@fis.puc.cl)
Ayudantes: Juan Manuel González (jmgonzalez4@uc.cl)
Fernanda Correa (fpazcorrea@uc.cl)

Resumen Métodos de la Física Matemática II

2022 - 1

- **Espacios vectoriales**

  Un conjunto V dotado de operación suma, +, y de una operación producto por escalar, $\cdot$, en que

$$+ : V \times V \to V \qquad\qquad \cdot : \mathbb{C} \times V \to V \tag{1}$$

  se llama espacio vectorial sobre los complejos si se satisfacen una serie de propiedades (e.g. Asociatividad, Distributividad, entre otras)

- **Independencia lineal**

  Un conjunto de vectores $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^{n}$ son linealmente independientes si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = 0 \tag{2}$$

  implica que $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$

- **Dimensión de un Espacio Vectorial dim(V)**

  Corresponde al número máximo de vectores linealmente independientes en V

- **Base de un espacio vectorial**

  Dado un espacio vectorial V de dimensión finita, dim(V) = n, una base para V es cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en V

- **Subespacios vectoriales**

  Dados un espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ y un subconjunto no vacío U de V, decimos que U es un subespacio vectorial de V si para todo $u, v \in U$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha u + \beta v \in U \tag{3}$$

- **Desigualdad de Schwarz**

  Si V es un espacio euclideo sobre $\mathbb{C}$, con producto interno (,) entonces se tiene

$$|(\vec{x},\vec{y})|^2 \leq (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}), \tag{4}$$

  para todo $\vec{x},\vec{y} \in V$.

- **Series de Fourier**

  La representación en serie de Fourier de una función $f(x)$ viene dada por:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \hat{e_n}(x) \tag{5}$$

  Donde los coeficientes c_n se denominan los coeficientes de Fourier y su expresión es

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \tag{6}$$

  Y los $\hat{e_n}(x)$ son una base ortonormal del espacio en el que definimos a las funciones periódicas que pueden representarse como serie de Fourier y están dados por

$$\hat{e_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \tag{7}$$

- **Ecuación de Bessel**

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{8}$$

- **Función de Bessel de primera especie de orden n**

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \tag{9}$$

- **Función de Bessel de primera especie de orden 0**

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{10}$$

- **Función Generatriz de las funciones de Bessel**

$$\Psi(x,t) = e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) \tag{11}$$

- **Representación Integral de las funciones de Bessel**

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} cos(x\ sin(\theta) - m\theta) d\theta \tag{12}$$

- **Transformada de Fourier**

  La transformada de Fourier en una dimensión de una función f(x) está definida por

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \tag{13}$$

  Mientras que la transformada de Fourier Inversa viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dx \tag{14}$$

  En 3 dimensiones la definición es similar. Para la Transformada tenemos

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} d^3\vec{x} \tag{15}$$

  y para la Transformada Inversa

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} d^3\vec{k} \tag{16}$$

- **Ecuación del calor**

  El problema para la ecuación del calor es encontrar $u(\vec{x}, t)$ tal que satisfaga:

$$u_t = K\Delta u \tag{17}$$

  Y suponiendo que la temperatura inicial es $u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$. Es conveniente tratar primero el problema independiente del tiempo (estado final)

$$K\Delta u_s = 0 \tag{18}$$

  Como estrategia para resolver el problema de valores iniciales con condiciones de borde no homogéneas (ej. cilindro recto finito), introducimos $v(\vec{x}, t) = u(\vec{x}, t) - u_s(\vec{x})$ que satisface el problema de borde

$$v_t = K\Delta v \tag{19}$$

  y obedece la condición inicial $v(\vec{x}, t) = f(\vec{x}) - u_s(\vec{x})$. Con esto ya podemos resolver el problema con el método de separación de variables como siempre.

- **Laplacianos útiles**

  En coordenadas cartesianas

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$$

  En coordenadas polares

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} \tag{20}$$

  En coordenadas cilíndricas:

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} + f_{zz} \tag{21}$$

  En coordenadas esféricas:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{22}$$

- **Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas**

  La ecuación de Laplace en coordenadas esféricas está dada por

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \tag{23}$$

  Utilizando el método de separación de variables llegamos a que la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es de la forma

$$u(r,\theta,\phi) = F(r)G(\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)Y_n^m(\theta,\phi) \tag{24}$$

  Donde los Y_n^m se conocen como los esféricos armónicos.

- **Esféricos Armónicos**

  La expresión normalizada para los esféricos armónicos es

$$Y_n^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\left(\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right)}P_n^m(cos\theta)e^{-im\phi} \tag{25}$$

  Donde $P_n^m(cos\theta)$ es el polinomio asociado de legendre de orden n y grado m. Los esféricos armónicos son ortonormales respecto al producto interno usual:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\bar{Y}_{n1}^{m1}Y_{n2}^{m2} sen\theta d\theta d\phi = \delta_{n1,n2}\delta_{m1,m2} \tag{26}$$

- **Polinomios de Legendre**

  Fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n \tag{27}$$

  Primeros polinomios:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) \end{aligned} \tag{28}$$